Material Teórico - Módulo Matrizes e Sistemas Lineares

O Conceito de Matriz

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

Uma matriz $m \times n$ (lê-se m por n) é uma tabela retangular com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas. Veja que sempre informamos primeiro o número de linhas e depois o número de colunas. De forma simplista, uma matriz é essencialmente uma tabela cujos elementos são números escolhidos a partir de um conjunto númerico base (normalmente o conjunto dos números reais). Os elementos de uma matriz também são chamados suas *entradas*.

Exemplo 1. *A seguir temos uma matriz* 2×3 *(dois por três), pois tem duas linhas e três colunas:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 35 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ -\pi & 7 \\ 2 & 1{,}3 \end{bmatrix},$$

por sua vez, é do tipo 3×2*, ao passo que*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

é do tipo 1×3.

Porque é importante estudar matrizes? Primeiramente, assim como com qualquer tabela, elas fornecem uma forma muito prática de *organizar dados*; assim, matrizes são muitos utilizadas em Ciência da Computação e Estatística. Por outro lado, o fato de *padronizarmos* a maneira de expressar esses dados facilita a comunicação dos mesmos; por exemplo, como vimos acima, ao trabalharmos com matrizes sempre informamos o número de linhas antes do número de colunas. Porém, o motivo mais importante e interessante é que podemos definir operações (por exemplo, de soma e multiplicação) entre matrizes, e estas operações são definidas de forma que matrizes possuem inúmeras aplicações em Matemática e outras ciências. Nos módulos seguintes veremos uma delas: a resolução de sistemas de equações lineares com várias equações e variáveis (em um computador podemos resolver sistemas com milhares de equações e variáveis). No ensino superior surgem aplicações mais avançadas, que vão desde o algoritmo original de buscas do Google (que usa o conceito de autovalores de uma certa matriz para determinar a importância de uma página web), a aplicações em computação gráfica e visualização 3D.

1.1 Forma geral

Ao escrevermos $\mathbf{A}_{m\times n} = [a_{i,j}]_{m\times n}$ para denotar uma matriz estamos informando que $\mathbf{A}_{m\times n}$ é uma matriz m por n, na qual o elemento que está na (interseção da) linha i e coluna j é igual a $a_{i,j}$, para todos os inteiros i e j tais que $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Os números m e n são chamados de *dimensões* da matriz. Dependendo do contexto, quando os valores de m e n estiverem subentendidos, poderemos omiti-los da notação escrevendo, por exemplo, apenas $\mathbf{A}$ ou $[a_{i,j}]$.

Ao organizarmos os valores $a_{i,j}$ na matriz, ela ficará com a seguinte aparência:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Exemplo 2. *Na matriz*

$$[a_{i,j}]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 15 & 75 & 375 \\ 45 & 225 & 1125 \end{bmatrix},$$

temos que $a_{i,j} = 3^i \cdot 5^j$*. Por exemplo, o elemento que está na interseção da primeira linha com a segunda coluna é igual a* $a_{1,2} = 3^1 \cdot 5^2 = 75$.

Exemplo 3. *Cada prova do ENEM possui uma matriz-padrão de respostas, onde cada linha corresponde a um aluno inscrito na prova e cada coluna representa um item da prova (que é como as questões são chamadas na nomenclatura do ENEM). As entradas da matriz são todas iguais a* 0 *ou* 1*, onde* 0 *indica um erro e* 1 *indica um acerto. Assim, em* 2016 *cada uma dessas matrizes possuía mais de* 7 *milhões e* 700 *mil linhas. Por outro lado, a matriz correspondente à prova de Matemática possui* 45 *colunas. Assim, se chamarmos a matriz-padrão da prova de Matemática de* $\mathbf{M} = [m_{i,j}]$*, ao escrevermos que* $m_{314,5} = 1$ *estaremos dizendo que o aluno de número* 314 *acertou a questão* 5 *da prova de Matemática; da mesma forma,* $m_{1.729.003,3} = 0$ *significa que o aluno* $1.729.003$ *errou a questão* 3.

2 Tipos especiais de matrizes

Uma matriz que possui apenas uma linha é chamada de *matriz linha*, e uma matriz que possui apenas uma coluna é chamada *matriz coluna*. Uma matriz na qual todas as entradas são iguais a zero é chamada de *matriz nula*.

Uma **matriz quadrada** é toda matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas. Quando uma matriz quadrada é n por n, para $n \in \mathbb{N}$, este número n é chamado de **ordem** da matriz.

Exemplo 4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *é uma matriz quadrada de ordem* 2.

Em uma matriz quadrada $[a_{i,j}]$ de ordem n, a *diagonal principal* é formada pelos termos $a_{i,j}$ com $i = j$, ou seja, $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$. Já a *diagonal secundária* corresponde aos termos $a_{i,j}$ tais que $i + j = n + 1$, ou seja, $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n,1}$. (Veja a Figura 1.)

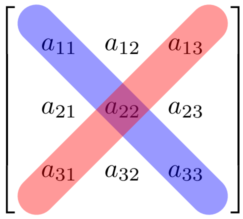

Figura 1: na matriz acima, a diagonal principal está em azul e a diagonal secundária em vermelho.

Exemplo 5. *Na matriz quadrada de ordem 3*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ x & y & z \end{bmatrix},$$

a diagonal principal é composta pela entradas a, j, z.

Uma matriz é dita *diagonal* se todos os elementos que *não estão* na diagonal principal são nulos. Ainda assim, as entradas da diagonal principal podem ou não serem nulas.

Exemplo 6. *São matrizes diagonais:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Toda matriz nula, por exemplo $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$*, também é uma matriz diagonal.*

> A **matriz identidade** de ordem n, também chamada matriz unidade, é a matriz $n \times n$ em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais elementos são iguais a 0. Denotaremos tal matriz por I_n.

Exemplo 7. *A matriz identidade de ordem 4 é a seguinte:*

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como podemos notar, quando $[a_{i,j}]$ é a matriz identidade temos, para todos i, j de 1 a n:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

> Dada uma matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ de elementos $a_{i,j}$, sua **matriz transposta**, denotada por $\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$, é a matriz obtida de $\mathbf{A}$ pela troca de linhas por colunas. Mais precisamente, $\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$ é a matriz $n \times m$ na qual o elemento da linha i e coluna j é igual a $a_{j,i}$ (ou seja, igual o elemento da linha j e coluna i de $\mathbf{A}$).

Exemplo 8. *Se* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$*, então*

$$\mathbf{A}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

De outra forma, também podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Em símbolos, se escrevermos $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ e $\mathbf{A}^{\mathbf{t}} = [a'_{i,j}]$, temos que $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Uma propriedade simples, mas importante, de transposição de matrizes é que, para toda matriz $\mathbf{A}$, temos

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{t}} = \mathbf{A}.$$

Realmente, trocando duas vezes linhas por colunas e vice-versa, reobtemos a matriz original.

3 Igualdade entre matrizes

Duas matrizes $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{i,j}]_{p \times q}$ são ditas *iguais* se, e só se, são do mesmo tipo, ou seja, $m = p$ e $n = p$, e, além disso, para todos i, j tais que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, temos $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Exemplo 9. *As matrizes* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *são diferentes, pois são de tipos diferentes.*

Exemplo 10. *Seja* $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{3 \times 3}$ *a matriz tal que* $a_{i,j} = \max\{i, j\}$*. Temos:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seja $\mathbf{B} = [b_{i,j}]_{3 \times 3}$ *a matriz tal que* $b_{i,j} = i + j - \min\{i, j\}$*. Dessa forma:*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+1-1 & 1+2-1 & 1+3-1 \\ 2+1-1 & 2+2-2 & 2+3-2 \\ 3+1-1 & 3+2-2 & 3+3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Comparando-as, é imediato que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Problema 11. *Encontre, se houver, todos os valores de x e y tais que:*

$$\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}.$$

Solução. Para satisfazer a definição de igualdade de matrizes, devemos ter:

$$\begin{cases} 2x = x + 1, \\ 3y = 2y, \\ 3 = 3, \\ 4 = y + 4. \end{cases}$$

Veja que as duas primeiras equações implicam $x = 1$ e $y = 0$; além disso, com tais valores de x e y as demais equações também são satisfeitas. Dessa forma, temos $x = 1$, $y = 0$ e a matriz do enunciado é igual a:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

Problema 12. *Encontre, se houver, todos os valores de x e y tais que:*

$$\begin{bmatrix} 8x & 7 \\ 3 & 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Solução. Não existem x e y que satisfazem essa igualdade uma vez que, nas matrizes dadas, as entradas situadas na interseção da linha 1 com a coluna 2 são distintas ($7 \neq 0$). □

Observação 13. *Na solução do problema anterior devemos tomar cuidado redobrado, uma vez que somos tentados a resolver as equações $8x = 16$ e $3y = 9$, o que nos daria $x = 2$ e $y = 3$. Estas condições são necessárias para a igualdade das matrizes mas não são suficientes. Realmente, mesmo com tais valores temos:*

$$\begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Dicas para o Professor

Esta aula essencialmente apresenta conceitos e nomenclaturas básicas para se trabalhar com matrizes. O conteúdo dela pode ser visto em um único encontro, o qual pode ser completado com conteúdos que serão apresentados nos materiais seguintes.

A referência [1] contém um curso completo, em nível de Ensino Médio, sobre matrizes, determinantes e sistemas lineares de equações.

Sugestões de Leitura Complementar

1. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Matrizes.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.