

# Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana Parte 2

## A Desigualdade Triangular

Oitavo Ano

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



PORTAL DA  
MATEMÁTICA  
OBMEP

# 1 A desigualdade triangular

Iniciamos esta seção com dois resultados que fornecem uma importante relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

**Proposição 1.** *Se  $ABC$  é um triângulo tal que  $AC > AB$ , então  $\widehat{B} > \widehat{C}$ .*

**Prova.** Como  $AC > AB$ , podemos considerar um ponto  $D \in \overline{AC}$ , tal que  $AB = AD$  (cf. Figura 1).

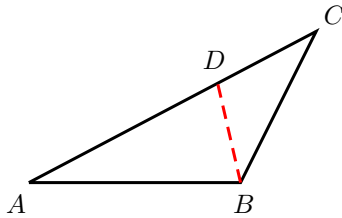


Figura 1: ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Agora, observe que

$$\widehat{B} = \widehat{ABC} > \widehat{ABD}.$$

Mas, uma vez que o triângulo  $ABD$  é isósceles, temos  $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$ . Por outro lado, como o ângulo  $\widehat{ADB}$  é um ângulo externo do triângulo  $BCD$ , temos  $\widehat{ADB} > \widehat{BCD} = \widehat{C}$ . Portanto, obtemos:

$$\widehat{B} = \widehat{ABC} > \widehat{ABD} = \widehat{ADB} > \widehat{BCD} = \widehat{C}.$$

□

Vale a recíproca da Proposição 1. Mais precisamente, temos o resultado a seguir.

**Proposição 2.** *Se  $ABC$  é um triângulo tal que  $\widehat{B} > \widehat{C}$ , então  $AC > AB$ .*

**Prova.** Uma vez que  $AC$  e  $AB$  são números reais, temos que ocorre uma, e somente uma, das seguintes opções:

- i.  $AC = AB$ ;
- ii.  $AC < AB$ ;
- iii.  $AC > AB$ .

Se fosse  $AC = AB$ , o triângulo  $ABC$  seria isósceles com base  $BC$  e, desse modo, teríamos  $\widehat{B} = \widehat{C}$ , o que contraria a hipótese  $\widehat{B} > \widehat{C}$ . Se fosse  $AC < AB$ , então, pela Proposição 1, deveria ocorrer  $\widehat{B} < \widehat{C}$ , o que também contraria a hipótese  $\widehat{B} > \widehat{C}$ . Portanto, a única possibilidade é termos  $AC > AB$ . □

**Exemplo 3.** *Em um país, certo dia, um avião partiu de cada cidade com destino à cidade mais próxima. Se as distâncias entre as cidades são duas a duas distintas, prove que em nenhuma cidade aterrissaram mais de cinco aviões.*

**Prova.** Seja  $A$  uma cidade qualquer desse país.

Afirmamos inicialmente que, se em  $A$  aterrissaram aviões partindo de outras duas cidades  $B$  e  $C$ , então, considerando o triângulo  $ABC$ , devemos ter  $\widehat{BAC} > 60^\circ$ .

De fato, se  $\widehat{BAC} \leq 60^\circ$ , então, uma vez que a soma dos ângulos de todo triângulo é  $180^\circ$ , concluímos que pelo menos um dos outros dois ângulos internos do triângulo  $ABC$  seria maior do que  $60^\circ$ . Desse modo, pela Proposição 2, uma das duas possibilidades a seguir ocorreria:

- (i)  $BC < AB$  (caso  $\widehat{ACB} > 60^\circ \geq \widehat{BAC}$ );
- (ii)  $BC < AC$  (caso  $\widehat{ABC} > 60^\circ \geq \widehat{BAC}$ ).

Entretanto, uma qualquer das possibilidades acima contradiria o fato de  $A$  ser a cidade mais próxima de  $B$  e de  $C$ , de sorte que deve ser  $\widehat{BAC} > 60^\circ$ .

Agora, suponha que chegassem seis aviões em  $A$ , com origens nas cidades  $B, C, D, E, F$  e  $G$ . (Veja a Figura 2.)

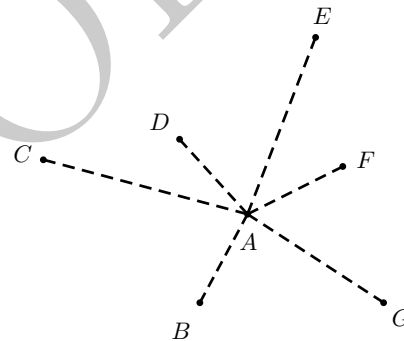


Figura 2: os aviões que chegam em  $A$ .

Então, por um lado teríamos

$$360^\circ = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAG} + \widehat{GAB},$$

de sorte que pelo menos um desses seis ângulos seria menor ou igual a  $60^\circ$ . Por outro, afirmação demonstrada no início da prova fornece uma contradição, uma vez que garante que cada um desses seis ângulos deve ser maior que  $60^\circ$ . □

A seguir, colecionamos duas consequências importantes da Proposição 2.

**Corolário 4.** *Se  $ABC$  é um triângulo tal que  $\widehat{A} \geq 90^\circ$ , então  $\overline{BC}$  é o seu maior lado. Em particular, a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo.*

**Prova.** Como  $\widehat{A} \geq 90^\circ$  e  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ , temos que  $\widehat{A} \geq 90^\circ > \widehat{B}$  e  $\widehat{A} \geq 90^\circ > \widehat{C}$ . Portanto, segue da Proposição 2 que  $BC > AC$  e  $BC > AB$ . □

**Corolário 5.** *Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos tais que  $AB = A'B'$  e  $AC = A'C'$ . Se  $\widehat{A} < \widehat{A}'$ , então  $BC < B'C'$ .*

**Prova.** Sejam  $\alpha$  o semiplano determinado por  $\overleftrightarrow{AC}$  e que contém o ponto  $B$ , e  $D$  o ponto de  $\alpha$  tal que  $AD = AB$  e  $\widehat{DAC} = \widehat{A'}$ . (Veja a Figura 3.)

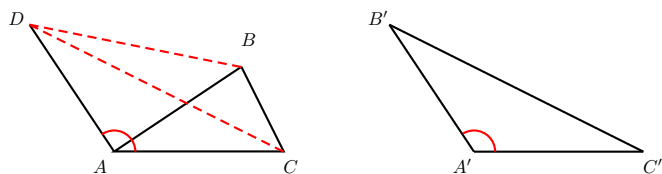


Figura 3: comparando o terceiro lado de dois triângulos.

Então os triângulos  $DAC$  e  $B'A'C'$  são congruentes (pelo caso LAL). Daí, obtemos  $DC = B'C'$ , e resta mostrar que  $DC > BC$ .

Para o que falta, a Proposição 2 garante ser suficiente mostrarmos que  $\widehat{CBD} > \widehat{CDB}$ . Mas essa desigualdade segue de que

$$C\widehat{BD} > A\widehat{BD} = A\widehat{DB} > C\widehat{DB}.$$

(Observe que vale a igualdade  $A\widehat{BD} = A\widehat{DB}$  porque o triângulo  $ABD$  é isósceles com base  $BD$ .)  $\square$

O teorema a seguir, conhecido como a **desigualdade triangular**, é o principal resultado a ser discutido nesse material.

**Teorema 6.** *Em todo triângulo, cada um dos lados tem comprimento menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

**Prova.** Seja  $ABC$  um triângulo com  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $BC$  é o maior dos lados do triângulo, de modo que  $a \geq b$  e  $a \geq c$ . Daí, segue imediatamente que  $b < a + c$  e  $c < a + b$ .

Resta, pois, mostrar que  $a < b + c$ . Para tanto, marque o ponto  $D$  sobre a semirreta oposta à semirreta  $AC$  tal que  $AD = AB = c$  (cf. Figura 4). Temos então que

$$CD = AC + AD = b + c.$$

Mas, note que o triângulo  $ABD$  é isósceles, o que acarreta  $A\widehat{DB} = A\widehat{BD}$  e, portanto,

$$C\widehat{DB} = A\widehat{DB} = A\widehat{BD} < A\widehat{BD} + A\widehat{BC} = D\widehat{BC}.$$

Agora, aplicando a Proposição 2 ao triângulo  $BCD$ , temos que  $a < b + c$ .  $\square$

A desigualdade triangular fornece uma condição necessária e suficiente para a colinearidade de três pontos no plano. Mais precisamente, três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano são colineares se, e somente se, uma das três opções abaixo é satisfeita:

(a)  $AC = AB + BC$ ;

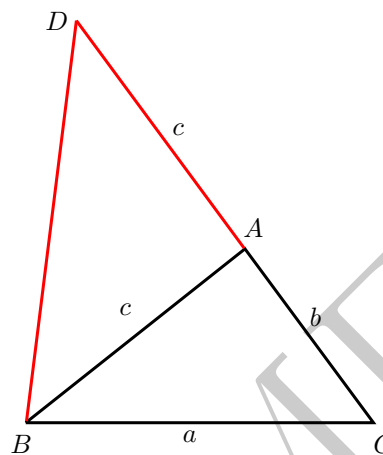


Figura 4: a desigualdade triangular.

(b)  $AB = AC + CB$ ;

(c)  $BC = BA + AC$ .

Realmente, é claro que quando três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano são colineares, ocorre uma, e somente uma das três opções acima, dependendo de qual dos três pontos dados esteja situado entre os outros dois.

Reciprocamente, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares, então eles formam um triângulo e, neste caso, a desigualdade triangular nos diz que  $AC < AB + BC$ ,  $AB < AC + CB$  e  $BC < BA + AC$ .

**Exemplo 7.** *Calcule a quantidade de retas determinadas por quatro pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  no plano, sabendo que  $AB = 8$ ,  $AC = 12$ ,  $AD = 5$ ,  $BC = 15$ ,  $BD = 13$  e  $CD = 14$ .*

**Solução.** Como

$$AB + AD = 8 + 5 = 13 = BD,$$

temos que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, com  $A$  situado entre  $B$  e  $D$ . Assim,  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$  representam a mesma reta. Por outro lado, como

$$AB + AC = 8 + 12 = 20 > 15 = BC,$$

concluimos que  $C \notin \overleftrightarrow{AB}$  (veja a Figura 5).

Portanto, as retas determinadas por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$ , num total de 4 retas.  $\square$

## 2 Algumas aplicações da desigualdade triangular

Nesta seção, colecionamos, a título de ilustração, algumas aplicações interessantes da desigualdade triangular. Para outras mais, veja as referências listadas ao final deste material teórico.

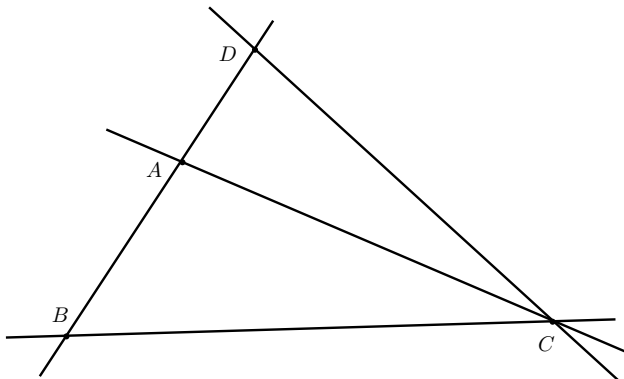


Figura 5: retas determinadas por quatro pontos, três dos quais colineares.

**Exemplo 8.** Seja  $D$  um ponto interior ao triângulo  $ABC$ , conforme mostrado na Figura 6. Prove que:

(a)  $DB + DC < AB + AC$ .

(b)  $DA + DB + DC < AB + AC + BC$ .

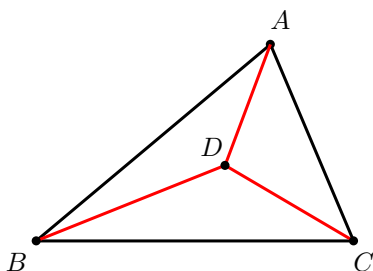


Figura 6: distância de um ponto interior aos vértices de um triângulo.

**Prova.** Para provar a parte (a), iniciamos com o prolongamento do segmento  $BD$  até que ele intersecte o lado  $AC$  no ponto  $E$  (cf. Figura 7).

Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos  $CDE$  e  $ABE$ , obtemos respectivamente

$$DC < DE + EC \text{ e } BE < AB + AE.$$

Combinando as duas desigualdades acima e utilizando a desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} DB + DC &< DB + (DE + EC) = (BD + DE) + EC \\ &= BE + EC < (AB + AE) + EC \\ &= AB + (AE + EC) = AB + AC. \end{aligned}$$

Para o item (b), observe que há, ainda, duas outras desigualdades análogas à desigualdade que foi provada no item (a):

$$DA + DB < CA + CB$$

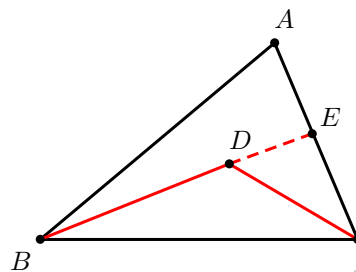


Figura 7: distância de um ponto interior aos vértices de um triângulo (bis).

e

$$DA + DC < BA + BC.$$

Somando membro a membro essas duas últimas desigualdades com aquela do item (a), obtemos

$$2(DA + DB + DC) < 2(AB + AC + BC),$$

ou seja,

$$DA + DB + DC < AB + AC + BC.$$

□

Para nossa próxima aplicação, precisamos definir alguns termos úteis.

Dado um triângulo  $ABC$ , definimos a **mediana** relativa ao vértice  $A$  (ou ao lado  $BC$ ) como o segmento de reta  $\overline{AM_1}$ , em que  $M_1$  é o ponto médio do segmento  $BC$ . Medianas relativas aos vértices  $B$  e  $C$  podem ser definidas, de maneira análoga, como sendo os segmentos  $\overline{BM_2}$  e  $\overline{CM_3}$ , em que  $M_2$  e  $M_3$  são, respectivamente, os pontos médios dos lados  $AC$  e  $AB$ .

Um resultado muito conhecido - e que demonstraremos mais adiante - diz que as três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado o **baricentro** do triângulo (veja a Figura 8).

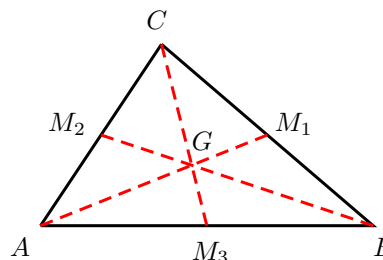


Figura 8: as medianas e o baricentro de um triângulo.

**Exemplo 9.** Mostre que, em todo triângulo, a soma dos comprimentos das medianas é maior que seu semi-perímetro.

**Prova.** Aplicando a desigualdade triangular aos triângulos  $CGM_1$ ,  $BGM_3$  e  $AGM_2$  (veja a Figura 8), obtemos respectivamente:

$$CM_1 < CG + GM_1,$$

$$BM_3 < BG + GM_3$$

e

$$AM_2 < AG + GM_2.$$

Agora, somando membro a membro as três desigualdades acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (BC + AB + AC) &= CM_1 + BM_3 + AM_2 \\ &< CG + GM_1 + BG \\ &\quad + GM_3 + AG + GM_2 \\ &= (CG + GM_3) + (BG + GM_2) \\ &\quad + (AG + GM_1) \\ &= CM_3 + BM_2 + AM_1. \end{aligned}$$

□

## Dicas para o Professor

Sugerimos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir cada uma das seções que compõem esse material. Na Seção 1, procure fazer o uso de desenhos para explicar a desigualdade triangular. Ainda fazendo o uso de desenhos, resalte que, no caso em que o comprimento de um dos lados de um “*triângulo*” é igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados, os três “vértices” passam a ser colineares e, assim, determinam um “*triângulo degenerado*”. Já na Seção 2, explique os resultados apresentados com todos os detalhes, sempre explicitando onde está sendo utilizada a desigualdade triangular.

As referências colecionadas a seguir contêm muito mais sobre a desigualdade triangular.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.