Módulo Elementos Básicos de Geometria - Parte 3

Pontos Notáveis no Triângulo.

8° ano/E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

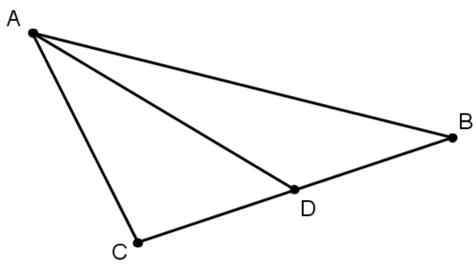
PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Elementos Básicos de Geometria - Parte 3.
Pontos Notáveis no Triângulo.

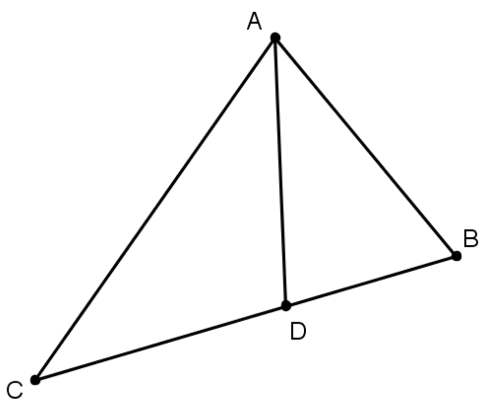
1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Nos triângulos abaixo, classifique as cevianas:

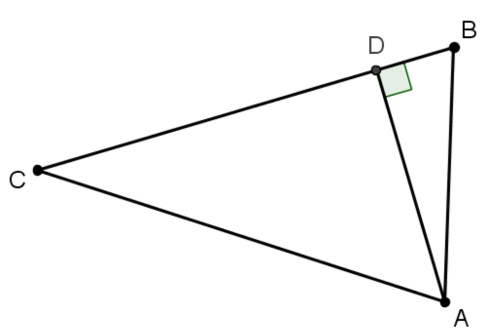
a) AD, sabendo que $BD = CD$.



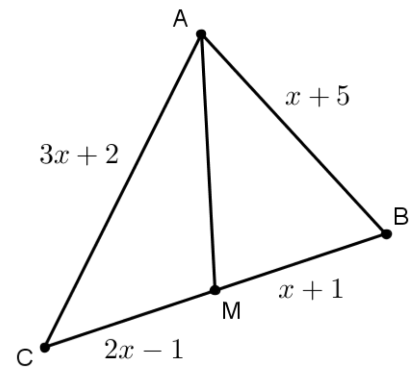
b) AD, sabendo que $\angle BAD = \angle CAD$.



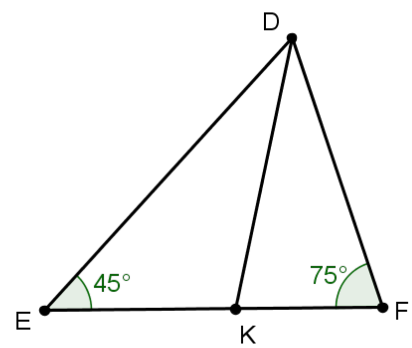
c) AD.



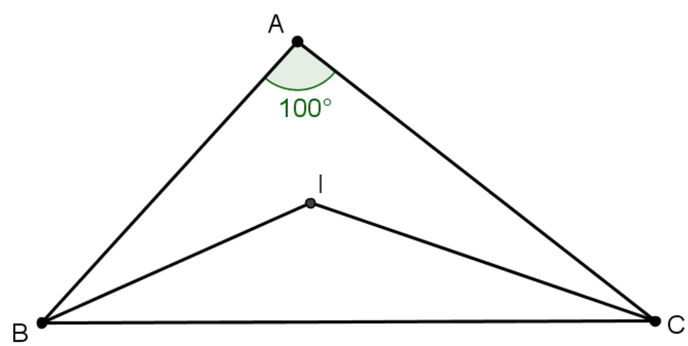
Exercício 2. Na figura abaixo, AM é mediana do triângulo $\triangle ABC$. Determine o perímetro de $\triangle ABC$.



Exercício 3. No triângulo abaixo, DK é bissetriz. Determine $\angle DKF$.



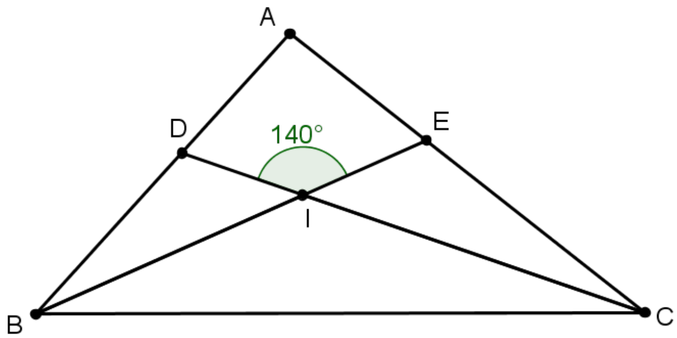
Exercício 4. Determine $\angle BIC$, sabendo que I é incentro do triângulo $\triangle ABC$.



Exercício 5. Seja o triângulo $\triangle PAZ$, onde AR é altura. Se $\angle PAR = 32°$ e $\angle PAZ = 70°$, determine $\angle RPA$ e $\angle RZA$.

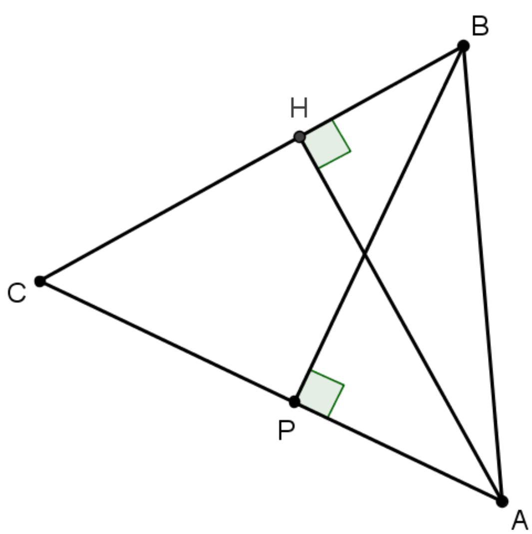
2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. No triângulo abaixo, BE e CD são bissetrizes. Determine $\angle BAC$.

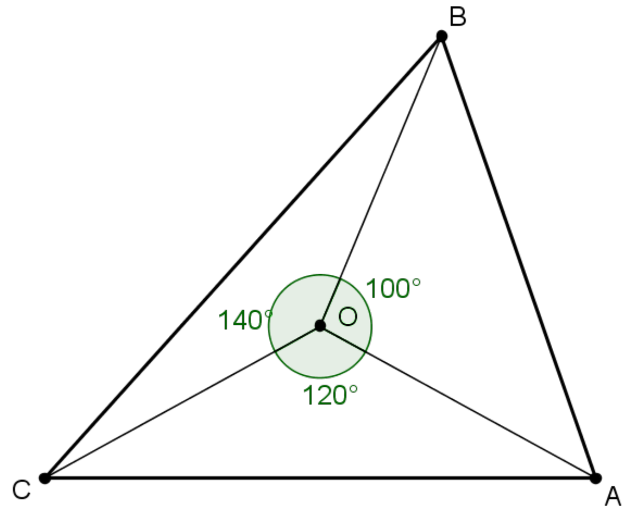


Exercício 7. O perímetro do triângulo $\triangle LUA$ é $100cm$. Sabendo que $LU = 25cm$, $LA = 45cm$ e LT é mediana, determine a medida de AT.

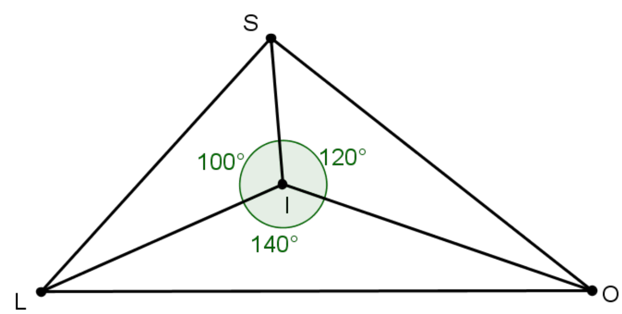
Exercício 8. No triângulo $\triangle ABC$ da figura, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CAB$ medem respectivamente 70° e 80°. Determine a medida do ângulo agudo formado pelas alturas AH e BP.



Exercício 9. No triângulo $\triangle ABC$ da figura, O é circuncentro. Determine as medidas dos ângulos internos do triângulo.



Exercício 10. No triângulo $\triangle SOL$ da figura, I é incentro. Determine as medidas dos ângulos internos do $\triangle SOL$.



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Mostre que que o baricentro de um triângulo qualquer divide as medianas na razão $2:1$.

Exercício 12. Seja N o ponto do lado AC do triângulo $\triangle ABC$ tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB. Sabendo que $AC = 12$ e que o baricentro G do triângulo $\triangle ABC$ pertence ao segmento MN, determine o comprimento do segmento BG.

Exercício 13. Mostre que a bissetriz AL de um triângulo $\triangle ABC$, sendo L um ponto do lado BC, gera segmentos BL e LC proporcionais aos lados AB e AC, ou seja, $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$. (Teorema da Bissetriz Interna)

Exercício 14. Mostre que a área de um triângulo pode ser calculada como o produto do seu semiperímetro pelo raio de sua circunferência inscrita.

Respostas e Soluções.

1.

a) mediana.

b) bissetriz.

c) altura.

2. Se AM é mediana, então M é ponto médio de BC. Temos então que $2x-1=x+1$, segue que $x=2$. Portanto, o perímetro do triângulo é $(3x)+(3x+2)+(x+5)=6+8+7=21$.

3. Temos $\angle EDF = 180° - 45° - 75° = 60°$. Como DK é bissetriz, então $\angle EDK = \angle FDK = \dfrac{60°}{2} = 30°$. Temos então que $\angle DKF = 180° - 30° - 75° = 75°$.

4. $\angle CBA + \angle BCA = 180° - 100° = 80°$. Se BI e CI são bissetrizes, então $\angle CBI = \dfrac{\angle CBA}{2}$ e $\angle BCI = \dfrac{\angle BCA}{2}$. Então temos que $\angle BIC = 180° - (\angle CBI + \angle BCI) = 180° - (\dfrac{\angle BCA + \angle CBA}{2}) = 180° - 40° = 140°$.

5. Como AR é altura do triângulo, $\angle ARP = \angle ARZ = 90°$. Temos então que $\angle RPA = 180° - 90° - 32° = 58°$ e $\angle RZA = 180° - 90° - 38° = 52°$.

6. $\angle BIC = \angle DIE = 140°$, pois são opostos pelo vértice. Temos então que:

$$\begin{aligned}\angle BAC &= 180° - (\angle ABC + \angle ACB)\\ &= 180° - 2(\angle IBC + \angle ICB)\\ &= 180° - 2(180° - 140°)\\ &= 100°.\end{aligned}$$

7. $UA = 100 - 25 - 45 = 30cm$. Se LT é mediana, então T é ponto médio de UA e, consequentemente, $AT = \dfrac{UA}{2} = 15cm$.

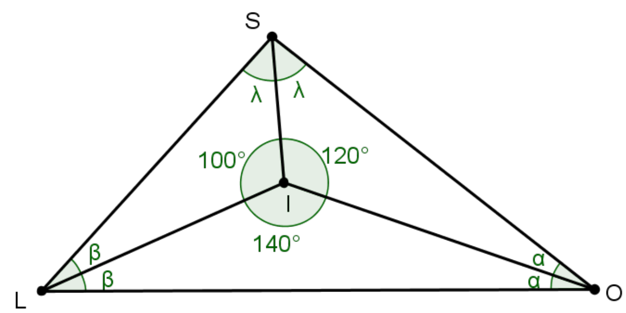
8. Vamos chamar a interseção das alturas AH e BP de K. $\angle ACB = 180° - \angle ABC - \angle CAB = 30°$. Pelo quadrilátero $CPKH$, temos $\angle PKH = 360° - 30° - 90° - 90° = 150°$, mas este é o ângulo obtuso formado pelas alturas. Sendo assim, o ângulo agudo mede $\angle BKH = 180° - 150° = 30°$.

9. Como O é circuncentro, os segmentos AO, BO e CO são congruentes e, por consequência, os triângulos $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ e $\triangle BOC$ são isósceles, ou seja, $\angle ABO = \angle BAO = \dfrac{180° - 100°}{2} = 40°$, $\angle ACO = \angle CAO = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$ e $\angle BCO = \angle CBO = \dfrac{180° - 140°}{2} = 20°$. Temos então que $\angle ABC = \angle ABO + \angle CBO = 40° + 20° = 60°$, $\angle ACB = \angle ACO + \angle BCO = 30° + 20° = 50°$ e $\angle BAC = \angle BAO + \angle CAO = 40° + 30° = 70°$.

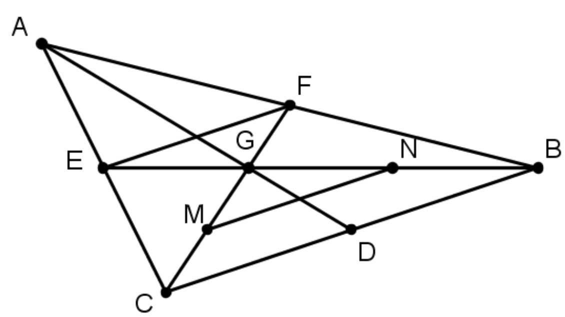
10. Se I é incentro, então $\angle SOI = \angle LOI = \alpha$, $\angle SLI = \angle OLI = \beta$ e $\angle OSI = \angle LSI = \lambda$. Analisando os triângulos $\triangle SOI$, $\triangle OLI$ e $\triangle LSI$, podemos montar um sistema:

$$\begin{cases}\alpha + \beta = 40°\\ \alpha + \lambda = 60°\\ \beta + \lambda = 80°\end{cases}$$

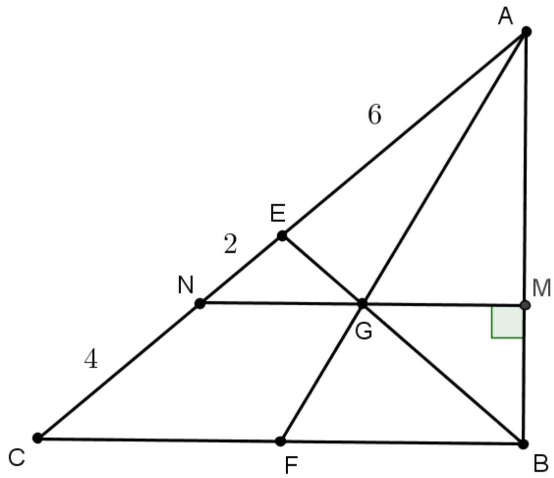
Somando todas as equações, chegamos a $\alpha + \beta + \lambda = 90°$. Segue que $\alpha = 10°$, $\beta = 30°$ e $\lambda = 50°$. Temos então que as medidas dos ângulos internos de $\triangle ABC$ são $\angle SOL = 20°$, $\angle OLS = 60°$ e $\angle LSO = 100°$.



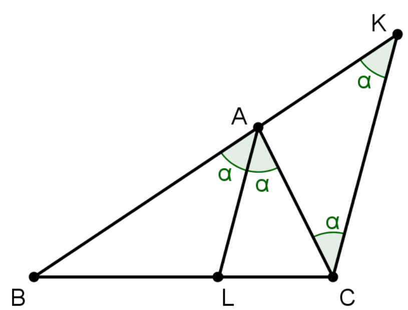
11. Sejam o triângulo $\triangle ABC$, AD, BE e CF suas medianas e G seu baricentro. Vamos marcar os pontos médios dos segmentos GC e GB, chamando-os, respectivamente, de M e N. Temos que MN é base média de $\triangle BCG$, ou seja, $MN = \dfrac{BC}{2}$ e é paralelo a BC. Da mesma forma EF é paralelo a BC e também mede a metade de BC, pelo triângulo $\triangle ABC$. Se $BC = EF$ e $BC//EF$, então $\triangle EFG \equiv \triangle MNG$, ou seja, $FG = GM$. Mas como M é ponto médio de CG, então $CG = 2GF$. De forma análoga, temos $BG = 2GE$ e $AG = 2GD$, ou seja, o baricentro divide as medianas na razão $2:1$.



12. (Extraído da OBM) Como $\dfrac{NE}{NC} = \dfrac{EG}{GB} = \dfrac{1}{2}$, então $NG//CB$ e também $CB \perp AB$. Temos então que $\triangle ABC$ é retângulo e $BE = \dfrac{AC}{2} = 6$. Como BE é mediana e G é baricentro, então $BG = \dfrac{2}{3} \cdot BE = 4$.

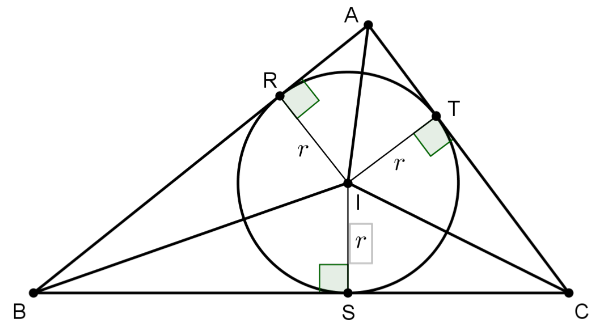


13. Traçando uma paralela a AL por C e prolongando AB, temos a interseção K. Observemos que $\angle BAL = \angle CAL = \angle ACK = \angle AKC$, com isso, $AK = AC$. Pelo Teorema de Tales temos que $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{BL}{LC}$, segue que $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BL}{LC}$.



14. Seja o triângulo $\triangle ABC$ e I seu incentro. Vamos chamar de R, S e T os pontos de interseção da circunferência inscrita ao triângulo $\triangle ABC$ e os lados AB, BC e AC, respectivamente. Temos que $IR = IS = IT = r$, onde r é a medida do raio da circunferência. Chamando a área do triângulo $\triangle ABC$ de $[ABC]$ e o semiperímetro de p, temos:

$$\begin{aligned}
[ABC] &= [ABI] + [BCI] + [ACI] \\
&= \frac{AB \cdot RI}{2} + \frac{BC \cdot SI}{2} + \frac{AC \cdot TI}{2} \\
&= \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} \\
&= \frac{(AB + BC + AC)r}{2} \\
&= \frac{(AB + BC + AC)}{2} r \\
&= p \cdot r.
\end{aligned}$$



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com