Material Teórico - Módulo Matrizes e Sistemas Lineares

Operações com Matrizes

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Operações com matrizes

Neste módulo vamos definir algumas operações básicas com matrizes.

1.1 Adição de matrizes

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes. Para que seja possível somá-las, é necessário que ambas tenham exatamente as mesmas dimensões. Suponha, então, que $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ e $B = [b_{i,j}]_{m\times n}$ sejam do mesmo tipo (ambas $m \times n$). Chama-se de *soma* de $\mathbf{A}$ com $\mathbf{B}$ a matriz $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, também m por n, onde $\mathbf{C} = [c_{i,j}]_{m\times n}$ é tal que

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

para todos os índices i e j. Assim, a soma de matrizes é calculada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Vejamos alguns exemplos numéricos.

Exemplo 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 3 & 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-2 & -4-7 \\ 3+3 & -1+3 & 10+10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -11 \\ 6 & 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

O teorema seguinte é consequência das propriedades da adição entre números reais (ou complexos). Deixamos a sua demonstração como exercício. O leitor interessado pode encontrá-la também em [1].

Teorema 3. *A soma de matrizes de números reais (ou complexos) goza das seguintes propriedades:*

(a) Associatividade: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, *para quaisquer* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *de mesmo tipo.*

(b) Comutatividade: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, *para quaisquer* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *de mesmo tipo.*

(c) Elemento neutro aditivo: dados $m, n \in \mathbb{N}$, *a matriz nula* $\mathbf{N}$ *de dimensões* $m \times n$ *é tal que* $\mathbf{A} + \mathbf{N} = \mathbf{N} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, *para toda matriz* $\mathbf{A}$ *de dimensões* $m \times n$.

(d) Inverso aditivo: Para toda matriz $\mathbf{A}$, *existe uma única matriz* $\mathbf{A}'$ *tal que* $\mathbf{A} + \mathbf{A}'$ *é a matriz nula de mesmo tipo que* $\mathbf{A}$.

Observação 4. *O (único) inverso aditivo da matriz* $\mathbf{A}$ *será, doravante, denotado por* $-\mathbf{A}$ *e chamado de* matriz oposta *de* $\mathbf{A}$. *Ele é obtido invertendo-se o sinal de cada uma das entradas de* $\mathbf{A}$. *Assim, se* $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$, *temos que* $-\mathbf{A} = [-a_{i,j}]$.

1.2 Produto de número por matriz

O produto de um número por uma matriz também é conhecido como *produto por escalar*. Dado um número k e uma matriz $\mathbf{A}$, digamos m por n, o produto de k por $\mathbf{A}$ é a matriz $B = k \cdot \mathbf{A}$ (ou simplesmente $k\mathbf{A}$) onde $B = [b_{i,j}]_{m\times n}$ é tal que

$$b_{i,j} = k \cdot a_{i,j},$$

para todos os índices i e j. Assim, $k \cdot \mathbf{A}$ é uma matriz, também m por n, na qual cada entrada é obtida multiplicando-se a entrada correspondente de $\mathbf{A}$ por k. Ainda de outra forma, o produto por escalar é calculado do seguinte modo:

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{1,1} & \cdots & k \cdot a_{1,n} \\ k \cdot a_{2,1} & \cdots & k \cdot a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m,1} & \cdots & k \cdot a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5. *Temos que:*

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & \pi \\ \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot \pi \\ 2 \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2\pi \\ 1 & -2 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Problema 6. *Considere as matrizes:* $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{2\times 3}$ *tal que* $a_{i,j} = i^2 + j^2$ *para todos* i *e* j, *e* $\mathbf{B} = [b_{i,j}]_{2\times 3}$ *tal que* $b_{i,j} = ij$. *Encontre a matriz* $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

Solução 1. Seja $\mathbf{C} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ e vamos denotar $\mathbf{C} = [c_{i,j}]_{m\times n}$. Usando as definições de produto por escalar e de soma de matrizes, temos que $c_{i,j} = a_{i,j} + 2 \cdot b_{i,j}$, para todos os índices i e j. Sendo assim,

$$c_{i,j} = (i^2 + j^2) + 2ij = (i + j)^2,$$

de forma que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (1+1)^2 & (1+2)^2 & (1+3)^2 \\ (2+1)^2 & (2+2)^2 & (2+3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}.$$

□

Solução 2. Como as matrizes do enunciado são pequenas, podemos calcular uma a uma todas as entradas de cada uma delas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 & 1^2+3^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 & 2^2+3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

e

$$2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Por fim,

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}.$$

□

Observação 7. *É evidente que a primeira solução do Problema 6 é bem mais elegante do que a segunda. A primeira solução nos mostra uma grande vantagem de se operar com matrizes: pensamos em matrizes como uma entidade abstrata única, tratando seus termos de forma genérica, sem a necessidade de calcular cada um deles individualmente (exceto na hora de exibir o resultado final). Nem toda matriz possui uma expressão tão simples para seu termo geral. Ainda assim, a ideia de ver a matriz como uma entidade única é essencial.*

1.3 Produto matricial

Estudaremos aqui o produto de duas matrizes, também conhecido como *produto matricial*. Ao contrário da soma de matrizes, o produto não está necessariamente definido para matrizes de mesmas dimensões e não é feito entrada a entrada. Ele é definido de uma maneira bastante peculiar que, quando vista pela primeira vez, pode não parecer natural. Por isso, vamos começar discutindo um exemplo prático para motivar a definição de tal produto.

Exemplo 8. *Uma confeitaria produz três tipos de bolos, vendidos em duas lojas. A matriz* **A** *abaixo possui uma linha para cada loja, uma coluna para cada tipo de bolo e indica quantos bolos de cada tipo foram vendidos por cada loja em uma dada semana.*

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \textit{Bolo 1} & \textit{Bolo 2} & \textit{Bolo 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{Loja A} \\ \textit{Loja B} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] = \mathbf{A}. \end{array}$$

Temos também uma matriz **B***, onde cada linha corresponde a um dos bolos, cada coluna corresponde a um ingrediente do bolo e as entradas indicam as quantidades de cada ingrediente necessário para fabricar cada bolo.*

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \textit{Farinha} & \textit{Açucar} & \textit{Leite} & \textit{Manteiga} & \textit{Ovos} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{Bolo 1} \\ \textit{Bolo 2} \\ \textit{Bolo 3} \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 500\,\mathrm{g} & 200\,\mathrm{g} & 500\,\mathrm{mL} & 150\,\mathrm{g} & 4 \\ 400\,\mathrm{g} & 100\,\mathrm{g} & 300\,\mathrm{mL} & 250\,\mathrm{g} & 5 \\ 300\,\mathrm{g} & 150\,\mathrm{g} & 600\,\mathrm{mL} & 0\,\mathrm{g} & 6 \end{array}\right] = \mathbf{B}. \end{array}$$

Qual a quantidade de ingredientes que cada loja precisou para produzir os bolos desta semana?

Solução. Queremos montar uma matriz **C** onde cada linha corresponde a uma loja e cada coluna corresponde a um ingrediente, a qual indique as quantidades de cada ingrediente usado por cada loja. Para tanto, defina

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \text{Farinha} & \text{Açucar} & \text{Leite} & \text{Manteiga} & \text{Ovos} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Loja 1} \\ \text{Loja 2} \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} \end{array}\right] = \mathbf{C}. \end{array}$$

Dessa forma, $c_{1,1}$ indica a quantidade de farinha usada pela Loja 1. Essa loja produziu 5 bolos do tipo 1, gastando $500\,\mathrm{g}$ de farinha em cada um, ou seja, $2500\,\mathrm{g}$ de farinha; produziu 4 bolos do tipo 2, gastando $400\,\mathrm{g}$ de farinha em cada um, ou seja, $1600\,\mathrm{g}$; e produziu 3 bolos do tipo 3, gastando $300\,\mathrm{g}$ de farinha em cada um, ou seja, $900\,\mathrm{g}$. Então, ao todo, a Loja 1 gastou $2500 + 1600 + 900 = 5000$ gramas de farinha, de sorte que $c_{1,1} = 5000\,\mathrm{g}$. Em resumo, para calcular $c_{1,1}$ tomamos os elementos da primeira linha de **A**, os multiplicamos um a um pelos elementos da primeira coluna de **B** e, em seguida, somamos os resultados:

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= 5\cdot 500 + 4\cdot 400 + 3\cdot 300 \\ &= 2500 + 1600 + 900 \\ &= 5000. \end{aligned}$$

Vejamos outro exemplo. Como calcular $c_{2,3}$, a entrada da segunda linha e terceira coluna de **C**? A linha 2 corresponde à Loja 2 e a coluna 3 corresponde ao ingrediente leite. Vamos, então, olhar para a linha correspondente à Loja 2 na matriz **A**, que indica os números de bolos de cada tipo produzidos por ela: $(3, 2, 4)$; e para a coluna do leite na matriz **B**, que indica a quantidade de leite em cada tipo bolo: $(500, 300, 600)$. Portanto, calculamos $c_{2,3}$ como abaixo:

$$\begin{aligned} c_{2,3} &= 3\cdot 500 + 2\cdot 300 + 4\cdot 600 \\ &= 1500 + 600 + 2400 \\ &= 4500, \end{aligned}$$

isto é, $c_{2,3} = 4500\,\mathrm{mL}$.

Se calcularmos cada uma das demais entradas de **C** da mesma forma, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \text{Farinha} & \text{Açucar} & \text{Leite} & \text{Manteiga} & \text{Ovos} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Loja 1} \\ \text{Loja 2} \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 5000\,\mathrm{g} & 1850\,\mathrm{g} & 5500\,\mathrm{mL} & 1750\,\mathrm{g} & 58 \\ 3500\,\mathrm{g} & 1400\,\mathrm{g} & 4500\,\mathrm{mL} & 950\,\mathrm{g} & 46 \end{array}\right] = \mathbf{C}. \end{array}$$

□

A operação realizada no Exemplo 8 para obter $\mathbf{C}$ é justamente o que chamamos de *produto matricial* da matriz $\mathbf{A}$ pela matriz $\mathbf{B}$. Escreve-se $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

De modo geral, para que seja possível calcular o produto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, é necessário que os tipos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam compatíveis, no seguinte sentido: o número de colunas de $\mathbf{A}$ precisa ser igual ao número de linhas de $\mathbf{B}$ (observe que esse foi o caso no exemplo anterior, quando $\mathbf{A}$ era uma matriz 2×3 e $\mathbf{B}$ uma matriz 3×5).

Suponha, pois, que $\mathbf{A}$ é do tipo $m \times n$, com entradas $a_{i,j}$, e $\mathbf{B}$ é do tipo $n \times p$, com entradas $b_{i,j}$. O resultado do produto será uma matriz $\mathbf{C} = [c_{i,j}]$ do tipo $m \times p$, de sorte que o produto matricial assume a forma:

$$\mathbf{C}_{m\times p} = \mathbf{A}_{m\times n} \times \mathbf{B}_{n\times p}.$$

Por fim, para todos os índices i e j de $\mathbf{C}$, o valor de $c_{i,j}$ é obtido tomando-se os elementos de linha i de $\mathbf{A}$ e os da coluna j de $\mathbf{B}$, multiplicando-os termo a termo e somando-se os resultados. (Veja a Figura 1[1].) Em símbolos, para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le p$, temos que:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}. \end{aligned}$$

O diagrama da Figura 1 é conhecido como *esquema de Falk*. Para calcular $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, escrevemos as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ num quadro da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{array}$$

Escrevemos as entradas de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ normalmente e, em seguida, calculamos as entradas de $\mathbf{C}$ uma a uma.

Exemplo 9. *Sejam* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Como* $\mathbf{A}$ *é* 2×2 *e* $\mathbf{B}$ *é* 2×3, *podemos realizar o produto matricial de* $\mathbf{A}$ *por* $\mathbf{B}$, *obtendo a matriz* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, *a qual será* 2×3. *Montamos o quadro abaixo onde cada elemento de* $\mathbf{C}$ *(em vermelho) é obtido multiplicando-se, termo a termo, a linha e a coluna correspondentes a ele e, depois, somando-se tais produtos:*

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 4 & 3 & 2 \\ & & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1\cdot 4 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3 & 4 & 3\cdot 4 + 4\cdot 2 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 & 3\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{array}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot 2 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 & 3\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 20 & 13 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[1] Adaptada de Alain Matthes. Código original disponível em `http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/`.

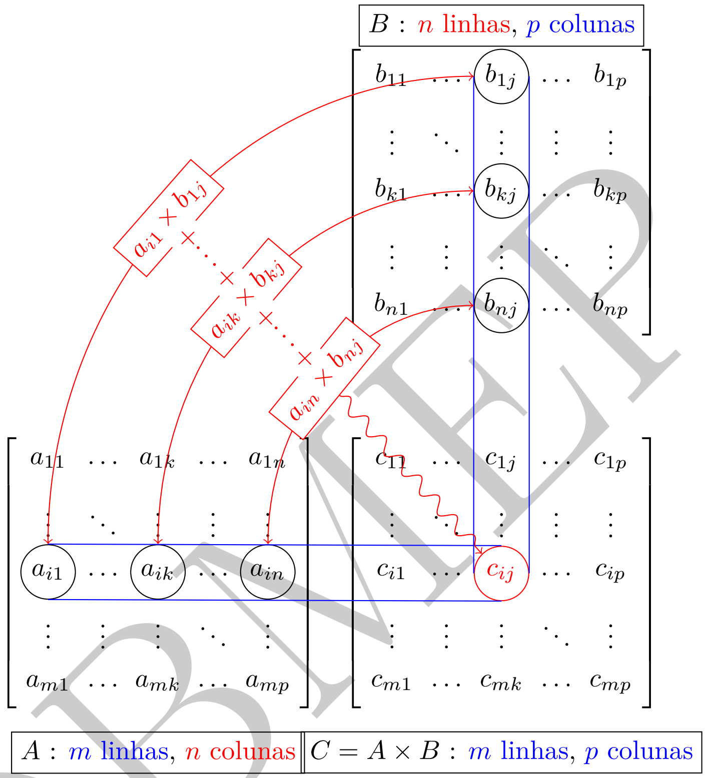

Figura 1: multiplicação de matrizes.

Com certa prática, podemos executar o mesmo método sem a necessidade de reescrever as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ no quadro.

Exemplo 10. *Sejam* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$. *Encontre o valor de* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Solução. Como $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{3\times 2}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{2\times 3}$, o resultado é uma matriz 3×3, conforme calculado abaixo:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1\cdot 4 + (-1)\cdot 4 & 1\cdot 2 + (-1)(-5) & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 4 + 2\cdot 4 & 2\cdot 2 + 2\cdot(-5) & 2\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot(-5) & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 16 & -6 & 8 \\ 28 & -14 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Ao contrário da adição, o produto entre duas matrizes não é comutativo (mas satisfaz as demais propriedades análogas às do Teorema 3).

Para justificar a não comutatividade, note primeiramente que, mesmo quando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são compatíveis para realizar o produto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, elas podem não ser compatíveis para $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Por exemplo, o produto $\mathbf{A}_{m\times n} \times \mathbf{B}_{n\times p}$ é válido para todos m, n e p, mas quando $p \ne m$ não há como realizar o produto $\mathbf{B}_{n\times p} \times \mathbf{A}_{m\times n}$. Além disso, ainda que $p = m$, o produto $\mathbf{A}_{m\times n} \times \mathbf{B}_{n\times m}$ resulta em uma matriz $m \times m$, enquanto que o produto $\mathbf{B}_{n\times m} \times \mathbf{A}_{m\times n}$ resulta em uma matriz $n \times n$. Assim, basta que $m \neq n$ para que tais produtos sejam diferentes, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 11. *Seja* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$ *e* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} z & w \end{bmatrix}_{1\times 2}$. *Temos que*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} \times \begin{bmatrix} z & w \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} xz & xw \\ yz & yw \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Por outro lado,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} z & w \end{bmatrix}_{1\times 2} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} zx + wy \end{bmatrix}_{1\times 1}.$$

Por fim, mesmo no caso em que $m = n = p$, ou seja, todas as matrizes envolvidas são $n \times n$, o exemplo a seguir mostra que ainda é possível que os produtos $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ sejam diferentes.

Exemplo 12. *Seja* $\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Podemos observar que:*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 & 0\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 13. *Se* $\mathbf{A}$ *é uma matriz quadrada de ordem* n *e* $\mathbf{I}_n$ *é a matriz identidade de ordem* n, *então* $\mathbf{I}_n \times \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Solução. Exercício! □

Dicas para o Professor

Recomendamos que este material seja apresentado em dois encontros de 50 minutos. O material da seção 'Multiplicação de matrizes" é um tópico fundamental e bastante sensível dentro da teoria de matrizes. É necessário fazer vários exemplos no quadro até que os alunos se acostumem com o método. Para mostrar como calcular $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, recomendamos começar usando o quadro do esquema de Falk, fazer outros exemplos (arbitrários) além dos que estão neste material, e depois seguir o mesmo método, porém omitindo as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do quadro.

Sugestões de Leitura Complementar

1. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Matrizes.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.