Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

Exercícios sobre Regra de Três

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

1 Revisão e Exercícios

O objetivo desta aula é revisar o método da regra de três para problemas envolvendo proporcionalidade, resolvendo uma série de exercícios. Dessa forma, é muito importante que o leitor primeiro tente resolver os exemplos que apresentaremos por conta própria, só depois olhando a solução. Como a regra de três composta pode ser considerada uma generalização da regra de três simples, a maior parte dos exemplos que iremos abordar em seguida serão relativos a esse caso mais geral.

Exemplo 1. *Uma ONG possui trinta voluntários que, trabalhando seis horas por dia durante doze dias, limpam uma área de* 2.500m^2 *de zona protegida. Caso a entidade tivesse um total de vinte voluntários trabalhando nove horas durante quinze dias, que tamanho de área protegida poderia ser limpa?*

Solução. Aqui, temos quatro variáveis: voluntários, horas de trabalho por dia, número de dias e área. Escreva uma tabela com quatro colunas (uma para cada variável) e duas linhas (uma para cada uma das situações apresentadas), conforme ilustrado a seguir:

voluntários	**horas/dia**	**dias**	**área**
30	6	12	2.500
20	9	15	x

Agora precisamos determinar quais grandezas são diretamente proporcionais e quais são inversamente proporcionais. Começamos pela coluna em que há a incógnita x, colocando uma seta para cima nesta variável (veja a próxima tabela). Nosso próximo objetivo é relacionar as outras três variáveis (vonluntários, horas/dia e dias) com a variável "área". Faremos isso em duas etapas, da seguinte forma:

- Fixados os números de horas/dia e dias, observe que, ao aumentarmos o número de voluntários, devemos aumentar também a área total que será limpa. Dessa forma, "voluntários" e "área" são diretamente proporcionais. Representamos esta relação escrevendo um seta para cima ao lado da descrição da variável "voluntários", na próxima tabela.

- Fixados os números de voluntários e de horas trabalhadas por dia, um aumento no número de dias de trabalho implicará uma área limpa maior. Dessa forma, "área" e "dias" são variáveis diretamente proporcionais. O mesmo ocorre para a variável "horas/dia". Portato, todas as variáveis são diretamente proporcionais.

Após esta análise inicial, ficamos com a seguinte tabela:

Conforme vimos na aula anterior, para montar a equação de proporção, escrevemos uma fração para cada coluna da

voluntários ($\uparrow$)	**horas/dia** ($\uparrow$)	**dias** ($\uparrow$)	**área** ($\uparrow$)
30	6	12	2.500
20	9	15	x

tabela, respeitando o sentido das setas. Neste caso, obtemos as frações

$$\frac{30}{20}, \quad \frac{6}{9}, \quad \frac{12}{15}, \quad \frac{2.500}{x}.$$

Agora fazendo a última fração igual ao produto das três primeiras, obtemos:

$$\frac{30}{20} \times \frac{6}{9} \times \frac{12}{15} = \frac{2500}{x}$$

Simplificando as frações acima, temos:

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2500}{x}$$

e, daí,

$$x = \frac{2500 \times 5}{4} = 3.125\text{m}^2.$$

□

Observe também que o exemplo anterior poderia ser resolvido acrescentando-se uma nova variável, chamada "horas totais", que pode ser definida como o produto das variáveis "horas/dia" e "dias". Nesta abordagem, bastaria construir uma tabela com três variáveis: "voluntários", "horas totais" e "área", e utilizar em seguida o método da regra de três composta para o conjunto destas variáveis.

Exemplo 2. *O comprimento do muro Parque Zoobotânico é de aproximadamente* $1,7\text{km}$*, e sua altura é de* $1,7\text{m}$*. Um artista plástico pintou uma área correspondente a* 34m^2 *do muro, em* 8 *horas trabalhadas em um único dia. Trabalhando no mesmo ritmo e nas mesmas condições, para pintar este muro um pintor levará quantos dias?*

Solução. Em primeiro lugar, devemos calcular a área do muro do parque em m^2. Este valor é igual a $1700 \times 1,7 = 2890\text{m}^2$. Agora, como temos as variáveis "área", "horas/dia" e "dias", escrevemos uma tabela com três colunas (uma para cada variável) e duas linhas (uma para cada uma das situações apresentadas). Isso é ilustrado a seguir:

área	**horas/dia**	**dias**
34	8	1
2890	8	x

Para descobrir quais grandezas são diretamente proporcionais e quais são inversamente proporcionais, começamos colocando uma seta para cima na variável "dias". Nosso próximo objetivo é relacionar as outras duas variáveis (área e horas/dia) com a variável "dias". Para tanto, comecemos observando que a coluna da variável "horas/dia" possui o mesmo número nas duas situações descritas no exemplo. Isso significa que podemos ignorá-la na formação da tabela final[1].

Agora, observe que ao aumentarmos o número de dias trabalhados, devemos aumentar também a área total que será pintada; dessa forma, “área” e “dias” são diretamente proporcionais. Representamos esta relação escrevendo um seta para cima ao lado da descrição de cada uma dessas variáveis.

Após esta análise inicial, ficamos com a seguinte tabela:

área (↑)	**dias** (↑)
34	1
2890	x

Uma vez que as variáveis envolvidas são diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{34}{2890} = \frac{1}{x}.$$

Por fim, multiplicando em xis, segue que

$$x = \frac{2890}{34} = 85,$$

e o pintor levará 85 dias para pintar todo o muro. □

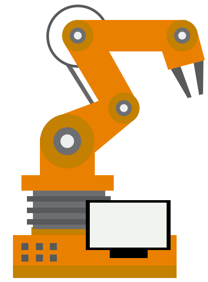
Deste último exemplo destacamos uma importante lição: ainda que um problema de proporcionalidade envolva diversas variáveis, uma (ou mais) delas poderá ser ignorada quando não houver alteração em seus valores entre as diferentes situações apresentadas. Fazer uma análise prévia como esta pode facilitar os cálculos e diminuir as chances dos alunos cometerem erros durante o desenvolvimento da solução.

Exemplo 3. *Uma indústria metalúrgica consegue produzir* 24.000 *peças de determinado tipo em* 4 *dias, trabalhando com* 6 *máquinas idênticas, que funcionam* 8 *horas por dia cada em ritmo idêntico de produção. Quantos dias serão necessários para que essa indústria consiga produzir* 18.000 *peças, trabalhando apenas com* 4 *dessas máquinas, no mesmo ritmo de produção, mas com todas elas funcionando* 12 *horas por dia?*

Solução. Como em todos os exemplos anteriores (desta e da aula passada), nossa primeira tarefa deve ser identificar as variáveis envolvidas. No presente caso, elas são “peças”, “dias”, “máquinas” e “horas/dia”. Em seguida, montamos uma tabela com quatro colunas (uma para cada variável) e duas linhas (uma para cada uma das situações apresentadas), conforme ilustrado a seguir:

Agora, precisamos determinar quais grandezas são diretamente proporcionais e quais são inversamente proporcionais. Também como antes, começamos atribuindo

[1] De fato, ao construirmos a fração equivalente a esta coluna, teremos o número 1 como resultado, valor não altera a equação de proporcionalidade.



peças	**dias**	**máquinas**	**horas/dia**
24.000	4	6	8
18.000	x	4	12

uma seta orientada para cima à coluna em que aparece a incógnita x. Nosso próximo objetivo é relacionar, em termos de proporcionalidade, as outras três variáveis (“peças”, “máquinas” e “horas/dia”) com a variável “dias”. Fazemos isto nas três etapas seguintes:

- Fixados os números de horas/dia e máquinas, observe que, ao aumentarmos o número de dias, aumentaremos a quantidade de peças produzidas. Dessa forma, “dias” e “peças” são variáveis diretamente proporcionais, o que nos leva a colocar uma seta orientada para cima ao lado da descrição da variável “peças” (veja a próxima tabela).

- Fixados os números de peças e máquinas, um aumento no número de dias implicará uma diminuição do número de horas trabalhadas por dia. (De fato, o mesmo trabalho total seria dividido em uma quantidade maior de dias.) Dessa forma, as grandezas ‘dias” e “horas/dia” são inversamente proporcionais, de modo que colocamos uma seta orientada para baixo ao lado da variável “horas/dia”.

- Por fim, fixados os números de peças e horas/dia, um aumento no número de dias implicará uma diminuição no número de máquinas. (Realmente, o mesmo trabalho total poderia ser executado em mais tempo, abrindo espaço para a diminuição no número de máquinas.) Dessa forma, “dias” e “maquinas” também são grandezas inversamente proporcionais, de sorte que colocamos uma seta orientada para baixo ao lado da variável “máquinas”.

Após esta análise inicial, ficamos com a tabela abaixo:

peças (↑)	**dias** (↑)	**máquinas** (↓)	**horas/dia** (↓)
24.000	4	6	8
18.000	x	4	12

Para montar a equação de proporcionalidade, escrevemos uma fração para cada coluna da tabela, invertendo em seguida as frações que representam colunas com seta para baixo. Assim fazendo, obtemos as frações:

$$\frac{24.000}{18.000}, \quad \frac{4}{x}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{12}{8}$$

Agora impomos que a fração que envolve a variável x seja igual ao produto das demais:

$$\frac{4}{x} = \frac{24.000}{18.000} \times \frac{4}{6} \times \frac{12}{8}.$$

Simplificando as frações, chegamos a $x = 3$, de forma que, sob as novas condições de produção, serão necessários três dias de trabalho. □

Exemplo 4. *Dez barcos, com capacidade de transportar* 80 *toneladas cada, fazem o percurso entre dois portos à velocidade de* 10 *nós. Sob tais condições, durante* 5 *dias eles podem transportar uma carga total de* 1.000 *toneladas, desprezando-se eventuais atrasos decorrentes da chegada e da partida dos portos. Sob as mesmas condições, planejamos utilizar* 8 *barcos iguais, viajando à velocidade de* 12 *nós durante* 6 *dias, para transportar, entre os mesmos dois portos, uma carga total de* 900 *toneladas. Qual deve ser a capacidade de transporte de cada um desses oito barcos?*

Solução. Na situação descrita, temos as variáveis "barcos", "capacidade", "velocidade", "dias" e "toneladas". Então, compomos uma tabela com cinco colunas (uma para cada variável) e duas linhas (uma para cada uma das situações apresentadas), como ilustrado a seguir:

barcos	**capacidade**	**velocidade**	**dias**	**toneladas**
10	80	10	5	1.000
8	x	12	6	900

Agora, precisamos descobrir quais grandezas são diretamente proporcionais e quais são inversamente proporcionais. Começamos colocando uma seta para cima na coluna da variável "capacidade". O próximo passo é relacionar as demais variáveis com a variável "capacidade". Fazemos isso em quatro etapas, da seguinte forma:

- Fixadas as demais variáveis, observe que, ao aumentarmos a capacidade de cada barco, podemos diminuir o número de barcos, pois o total de carga a transportar seria o mesmo. Dessa forma, "capacidade" e "barcos" são inversamente proporcionais.
- Fixadas as demais variáveis, observe que, ao aumentarmos a capacidade de cada barco, podemos diminuir a velocidade de cada um. Dessa forma, "capacidade" e "velocidade" também são inversamente proporcionais.
- Fixadas as demais variáveis, observe que, ao aumentarmos a capacidade de cada barco, podemos diminuir o total de dias utilizados. Dessa forma, também "capacidade" e "dias" são inversamente proporcionais.
- Por fim, fixadas as demais variáveis, observe que, ao aumentarmos a capacidade de cada barco, aumenta-se o total de toneladas transportadas. Dessa forma, "capacidade" e "toneladas" são diretamente proporcionais.

A análise acima possibilita a atribuição de setas às demais colunas, conforme mostrado na próxima tabela:

barcos	**capacidade**	**velocidade**	**dias**	**toneladas**
($\downarrow$)	($\uparrow$)	($\downarrow$)	($\downarrow$)	($\uparrow$)
10	80	10	5	1.000
8	x	12	6	900

Para montar a equação de proporcionalidade, escrevemos uma fração para cada coluna da tabela, invertendo em seguida as frações que representam colunas com seta para baixo. Neste caso, obtemos:

$$\frac{8}{10}, \quad \frac{80}{x}, \quad \frac{12}{10}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{1000}{900}.$$

Agora, fazemos a segunda fração (a que contém a variável x) igual ao produto das demais, obtemos:

$$\frac{80}{x} = \frac{8}{10} \times \frac{12}{10} \times \frac{6}{5} \times \frac{1000}{900}.$$

Multiplicando em xis, obtemos

$$x = \frac{80 \times 10 \times 10 \times 5 \times 900}{8 \times 12 \times 6 \times 1000} = 62,5$$

toneladas por barco. □

2 Sugestões ao Professor

Recomendamos dois encontros de 50 minutos cada para apresentar os exercícios deste material. Veja que a maior dificuldade da regra de três é a distinção entre variáveis que são diretamente proporcionais e variáveis que são inversamente proporcionais. Sugerimos que o professor resolva cada exercício mais de uma vez, trocando a primeira variável que recebe uma seta para cima. Faça os alunos perceberem que a escolha desta variável não altera o resultado final. Além disso, é importate que o professor escreva no quadro o raciocínio que compara variáveis para saber se elas são inversamente ou diretamente proporcionais. Alguns alunos podem se distrair momentaneamente durante a explicação e as notas escritas no quadro serão úteis para que a turma entenda alguma parte da explicação que foi "perdida".

Créditos pelas figuras:
www.freepik.com